

循環を回避する構成的含意の解釈について

豊岡 正庸 (Masanobu Toyooka)

東北大学・日本学術振興会

本発表は (Okada 1987) で提案された、非循環的な正当化をもつ構成的含意の解釈について探求を行う。論理結合子の構成的解釈として、BHK 解釈が知られる。BHK 解釈では含意は以下の節により解釈される (cf. van Dalen 2013, p.156) :

「 $A \rightarrow B$ 」の証明は、任意の「 A 」の証明を、「 B 」の証明へと変形する構成である。

この節での「構成」が何を指すのかには議論の余地があるが、「構成」を「証明」と解した場合、モーダス・ポネンスの正当化は、(Gentzen 1936) で指摘された循環に陥る。どのような循環に陥るかを見るために、まずモーダス・ポネンスが、この解釈を用いて、いかに正当化されるかを説明する。モーダス・ポネンスとは「 A 」と「 $A \rightarrow B$ 」から「 B 」を導いてよい、という規則である。この規則の正当化のために、「 A 」と「 $A \rightarrow B$ 」の証明がそれぞれ存在すると仮定しよう。このとき、「 B 」を結論としてもつ証明が存在することを示せばよい。ここで、先述の BHK 解釈によれば、「 $A \rightarrow B$ 」の証明の存在は、任意の「 A 」の証明を、「 B 」の証明へと変換する証明の存在を含意する。つまり、以下のような証明 D が存在することが含意されている：

$$\begin{array}{c} A \\ D \\ B \end{array}$$

この証明の上部に、その存在を仮定した「 A 」の証明を組み合わせることで、「 B 」の証明を構成できる。これが含意に対する BHK 解釈を用いたモーダス・ポネンスの正当化である。しかし、先述の通り、この正当化は循環に陥る。任意の「 A 」の証明を、「 B 」の証明へと変換する証明 D の中には、モーダス・ポネンスの適用が含まれている可能性がある。特に、「 A 」と「 $A \rightarrow B$ 」に対する、モーダス・ポネンスの適用が含まれている可能性がある。この場合、正当化したい規則がその正当化の中で適用されていることになる。ゆえに、この正当化は循環に陥る。

この問題を回避する方法はいくつか提示されているが、(Okada 1987) は上述の含意に対する BHK 解釈を、以下の節に変更することを提案した：

「 $A \rightarrow B$ 」の証明は、「 A 」を前提としてもつ「 B 」の（実際の）証明である。

この解釈をとった場合、モーダス・ポネンスを循環なく正当化可能である。まず、「 A 」と「 $A \rightarrow B$ 」の証明がそれぞれ存在すると仮定する。このとき、「 B 」の証明の存在を示せばよい。仮定より「 A 」を前提としてもつ「 B 」の証明が存在する。この証明の上部に

その存在を仮定した「 A 」の証明を組み合わせることで、「 B 」の証明を構成することができる。これがこの解釈をとった場合の、モーダス・ポネンスの正当化である。

この含意解釈では、「 A 」を前提としてもつ「 B 」の証明の存在が問題となるため、証明のもつ前提に言及する必要がある。それゆえ、(Okada 1987) では、前提と帰結を明示的に記述可能な、シークエントと呼ばれる論理式の多重集合と論理式のペアが扱われている。論理式の多重集合「 Γ 」と論理式「 A 」からなるシークエントを「 $\Gamma \Rightarrow A$ 」と表記する。含意に加え、連言と選言に対する証明を用いた解釈が与えられたうえで、シークエントの妥当性は論じられる。自然に生じる問は、この妥当性概念がいかなる論理を捉えているのか、というものであるが、この点について以下の二点が (Okada 1987) で示されている。第一に、厳密含意論理 S4 (cf. Corsi 1987) のシークエント計算で証明可能なシークエントはすべて妥当である。第二に、その逆は成り立たない。換言すれば、厳密含意論理 S4 のシークエント計算はこの妥当性概念に対して健全だが完全ではない。よって、この妥当性概念に対し健全かつ完全となるのが、いかなる論理の証明体系なのか、は未解決問題である。

本発表では、この問題に部分的な解答を与える。具体的には、以下の双条件文を示す：

「 $\Theta \Rightarrow A \rightarrow B$ 」が妥当 iff

「 Θ 」を前提、「 $A \rightarrow B$ 」を帰結としてもつ規則が厳密含意論理 S4 において許容可能、

ただし、「 Θ 」はその主結合子が含意である論理式のみからなる有限集合。ある規則が論理 L において許容可能であるのは、その規則が、 L の定理の集合を変えないときである (cf. Chagrov & Zakharyashev 1997, p.16)。導出可能な規則は許容可能であるが、その逆は一般に成り立たず、厳密含意論理 S4 においても、許容可能であるが導出可能ではない規則が存在する。上述の双条件文は、その中出现するすべての論理式の主結合子が含意の場合、妥当なシークエントは厳密含意論理 S4 において許容可能な規則を捉えている、ということを意味する。また、上述の双条件文の成立に加え、この双条件文を任意の論理式の有限集合「 Γ 」と論理式「 A 」に一般化した主張の不成立も示される。

参考文献

- Chagrov, A and Zakharyashev, M.: *Modal Logic*. Clarendon Press. 1997.
- Corsi, G.: Weak logics with strict implication. *Mathematical Logic Quarterly* 33(5):389—406. 1987.
- van Dalen, Dirk.: *Logic and Structure*. 5th edition. Springer, 2013.
- Gentzen, G.: Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112:493—565. 1936. Reference to English translation: The consistency of elementary number theory. In Szabo, M. E. editor, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, volume 55 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, pp.132—213. 1969.
- Okada, M.: A weak intuitionistic propositional logic with purely constructive implication. *Studia Logica* 46:371—382. 1987.